

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЦЕНТРАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

III кръг, 10 април 2010 г., теоретичен тур

Ученици от 11-12 клас – решения

1 задача. Тихо Брахе. Забележителният датски астроном Тихо Брахе е извършвал многогодишни систематични наблюдения на планетите. Той е създател на най-точните наблюдателни инструменти в епохата преди изобретяването на телескопа.

Като не споделял напълно геоцентричната система, Тихо Брахе считал, че планетите обикалят около Слънцето. Но Земята според него, все пак е неподвижна и Слънцето заедно с планетите се движи около нея.

- Тихо Брахе е бил готов да приеме хелиоцентричната система на Коперник, но е бил озадачен от липсата на един наблюдаем ефект, който би потвърдил движението на самата Земя. Какъв е бил този ефект?

Тихо Брахе е разсъждавал какво би следвало от предположението, че Земята наистина се движи около Слънцето, а гореспоменатият ефект не може да се наблюдава, понеже е твърде малък за тогавашната точност на измерванията (една дъгова минута). В писмо до свой колега астроном той пише: „Счита ли за възможно разстоянието между Слънцето и Сатурн да не съставлява и $1/700$ част от разстоянието до сферата на неподвижните звезди? А тогава и неподвижните звезди от трета звездна величина, видимият диаметър на които е равен на една минута, трябва да имат размерите на” (По времето на Тихо Брахе все още се е считало, че звездната величина се определя от видимия размер на звездите).

- Какво трябва да е минималното разстояние до “сферата на неподвижните звезди” според разсъжденията на Тихо Брахе?

- Имал ли е той добра представа за разстоянието между Слънцето и Сатурн?
- Запълнете пропуснатото в края на цитата от писмото на Тихо Брахе.
- С какви други наблюдения с наземни телескопи може да се докаже движението на Земята около Слънцето?

Решение:

При точност до една дъгова минута не би могло да се установи и измери паралактичното отместване на по-близките звезди на фона на по-далечните, което се дължи на движението на Земята по нейната орбита около Слънцето. Както е известно, дори и за най-близката звезда паралаксът, съответстващ на видимия от звездата радиус на земната орбита, е по-малък от една дъгова секунда. Наблюдението на това явление твърдо би убедило Тихо Брахе, че Земята не е неподвижна, а обикаля около Слънцето. Тихо Брахе очевидно е бил наясно, че е възможно Земята наистина да се движи около Слънцето, но паралактичното отместване на звездите да не се забелязва, понеже звездите са на много големи разстояния. Това, което е поразявало Тихо Брахе, както личи от писмото, е колко всъщност огромни трябва да са тези разстояния в сравнение с тогавашните представи за мащабите на Вселената. Минималното разстояние, на което трябва да са най-близките звезди, за да не може да се забележи паралактичното им отместване, е разстоянието, при което диаметърът на земната орбита се вижда под ъгъл една дъгова минута. С други думи,

радиусът на земната орбита трябва да се вижда от такива звезди под ъгъл 30 дъгови секунди и според съвременното определение това е нейният паралакс. Тъй като при паралакс една дъгова секунда разстоянието до звездата е един парсек, то при 30 пъти по-голям паралакс разстоянието до най-близките звезди би трябвало да бъде $1/30$ част от парсека. Като знаем, че в един парсек има приблизително 206265 астрономически единици, получаваме, че най-близките звезди трябва да са на разстояние:

$$206265 / 30 \approx 6880 \text{ астрономически единици}$$

От таблицата с данните за планетите виждаме, че според съвременните данни Сатурн е отдалечен на разстояние от Слънцето около 9.5 астрономически единици. Това е $6880 / 9.5 \approx 720$ пъти по-малко от разстоянието до най-близките звезди, получено по-горе. Оценката на Тихо Брахе е около 700 пъти, което означава, че той е имал доста точна представа за разстоянието от Слънцето до Сатурн в астрономически единици. (Проблемът в онези времена е бил, че не е било известно със задоволителна точност самото разстояние от Земята до Слънцето, т.е. самата стойност на астрономическата единица).

Тихо Брахе е считал, че видимият от Земята ъглов размер на една звезда от трета звездна величина е една дъгова минута. Ако тази звезда е на оцененото от него минимално разстояние, то от нея диаметърът на земната орбита трябва да се вижда под ъгъл една дъгова минута. Следователно самата звезда трябва да има размерите на земната орбита. Пропуснатите думи в края на изречението на Тихо Брахе са “земната орбита”.

При наблюдения с наземни телескопи освен паралактичното отместване, може да се наблюдава и друг вид видимо отместване на небесните обекти, дължащо се на аберацията на светлината. Поради обикалянето на Земята около Слънцето се наблюдават също и изменения с период една година на лъчевите скорости на звездите и също – изменения с период една година на периодите на много циклични явления при космическите обекти.

Критерии за оценяване:

Общо 12 т.

За правилен отговор и обяснение по първото подусловие – 2 т.

За представяне на добър начин за пресмятане на минималното разстояние до сферата на звездите – 3 т.

За верен числен отговор – 1 т.

За сравнение с разстоянието до Сатурн и извод за точността на знанието на това разстояние по времето на Тихо Брахе – 2 т.

За правилно допълване на края на цитата и обяснение – 2 т.

За посочване на други начини за доказване на движението на Земята – 2 т.

2 задача. Ерида. Планетата джудже Ерида се движи по елиптична орбита около Слънцето с период 557 години. Както е известно, тя се оказа по-голяма от Плутон, което постави точка на спора между астрономите дали Плутон да продължава да се счита за една от т.нар. големи планети и той беше причислен към групата на планетите джуджета.

- Понастоящем Ерида е много близо до своя афелий и се намира на 97.6 астрономически единици от Слънцето. Видимата ѝ звездна величина е 18.7^m . Каква би била звездната величина на Ерида, когато тя е в перихелия на своята орбита?

- В дните на олимпиадата Плутон се намира на разстояние 31.81 астрономически единици от Слънцето и има видима звездна величина 14.09^m . Оценете отношението на отразителната способност на Ерида към тази на Плутон. Какво заключение за физическата природа на двете тела можете да направите?

• Защо се оказва така, че повечето новооткрити ледени астероиди от пояса на Кайпър са близо до афелия на своите орбити около Слънцето?

Решение:

Означаваме орбиталния период на Ерида с T , голямата полуос на нейната орбита с a , а разстоянията до Слънцето в перихелий и афелий – съответно с r_p и r_a . Очевидно:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

Съгласно III закон на Кеплер:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1$$

Формулата важи, когато голямата полуос е в астрономически единици, а периода – в земни години. Оттук получаваме:

$$r_p = \sqrt[3]{T^2} - r_a$$
$$r_p \approx 37.8 \text{ AU}$$

Това е много близко до средното разстояние от Плутон до Слънцето. За осветеностите, които Ерида създава на Земята, когато е в афелий и перихелий, съответно E_a и E_p , можем да напишем:

$$\frac{E_p}{E_a} = \left(\frac{r_a}{r_p} \right)^4 \approx 44.45$$

Осветеностите са обратно пропорционални на 4-тата степен на разстоянията, защото например за Ерида: 1) Осветеността, която Слънцето създава на повърхността на Ерида е обратно пропорционална на втората степен на разстоянието от него до Ерида; 2) Осветеността, която Ерида създава на Земята, като отразява слънчевата светлина, е обратно пропорционална на разстоянието от нея до Земята. Тук пренебрегваме разликите между разстоянията Земя – Ерида и Слънце – Ерида. Означаваме звездните величини на Ерида в афелий и перихелий с m_a и m_p . Получаваме:

$$2.5 \lg \frac{E_p}{E_a} = m_a - m_p$$

$$m_p = m_a - 2.5 \lg \frac{E_p}{E_a}$$

$$m_p \approx 14.58^m$$

Осветеността, която Плутон създава на Земята, означаваме с E_{pl} . За осветеностите, създавани от Плутон и Ерида, когато тя е в перихелий, е в сила съотношението:

$$\frac{E_{pl}}{E_p} = \frac{A_{pl}}{A} \left(\frac{r_p}{r_{pl}} \right)^4 \cdot \left(\frac{D_{pl}}{D} \right)^2$$

където A и A_{pl} са отражателните способности на Ерида и Плутон, а D и D_{pl} са техните диаметри. Освен това:

$$\frac{E_{pl}}{E_p} = 2.512^{m_p - m_{pl}} \approx 1.57$$

Така можем да пресметнем:

$$\frac{A}{A_{pl}} = \frac{E_p}{E_{pl}} \cdot \left(\frac{r_p}{r_{pl}} \right)^4 \cdot \left(\frac{D_{pl}}{D} \right)^2 \approx 1$$

Трябва да отбележим, че използваната стойност за диаметъра на Ерида все още е твърде неточно определена и полученият резултат за отражателните способности също не може да се счита за точен. Но той показва, че отражателните способности на двата обекта не се различават много. Наистина това следва и да се очаква, като се има предвид, че те и двете са съставени предимно от ледове. В интерес на истината трябва да се спомене обаче, че поради различни явления, свързани с атмосферата на Плутон, при изменение на разстоянието му до Слънцето, когато той се движи по ексцентричната си орбита, неговата отражателна способност варира в значителни граници. (Това твърдение не се изисква при решаването на задачата от учениците).

Повечето ледени астероиди от пояса на Кайпър се откриват близо до афелия на своите орбити, или поне в отдалечените от Слънцето части на тези орбити. Обяснението се дава от II закон на Кеплер. Според него, при движение на тяло около друго тяло, разглеждано като център на гравитационно въздействие, скоростта зависи от разстоянието до централното тяло и намалява с увеличаване на това разстояние. Когато ледените астероиди се движат по своите издължени орбити, в далечните части на тези орбити те имат по-малки скорости и следователно остават там доста по-дълго време. Ето защо когато един такъв астероид е наблюдаван, то най-голяма е вероятността да бъде намерен около афелия на орбитата си. Така че причината повечето астероиди от пояса на Кайпър да се откриват в далечните части от орбитите си може да се обясни със статистически ефект.

Критерии за оценяване:

Общо 16 т.

За пресмятане на разстоянието на Ерида до Слънцето в перихелий и верен числен резултат – 2+1 т.

За пресмятане на звездната ѝ величина и верен числен резултат – 4+1 т.

За отношението на отражателните способности и добра числена оценка – 3+1 т.

За извод за природата на обектите – 1 т.

За последното подусловие – 3 т.

3 задача. Лунен модул. При пилотиран полет до Луната космическият кораб влиза в кръгова орбита с радиус r около нашия спътник. От кораба се отделя лунният модул с част от екипажа, който ще кацне на Луната.

- С каква величина трябва да се промени енергията на лунния модул, за да се спусне на Луната по елипса с апоселений на орбитата на космическия кораб и периселений на лунната повърхност? (Термините периселений и апоселений произлизат от името на древногръцката богиня на Луната Селена). Масата на Луната е M , радиусът ѝ е R , а масата на лунния модул е m .

- Кое е енергетически по-изгодно – след отделянето от кораба скоростта на лунния модул да се промени така, че той да тръгне към повърхността на Луната по гореописаната елиптична траектория, или така, че да пада свободно по права линия към Луната? В разглеждането да се отчетат и разходите на енергия за маневрите по спирането на кораба при кацането на Луната.

Решение:

Космическият кораб, движещ се по кръгова орбита около Земята, има скорост:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}$$

където γ е гравитационната константа. След отделянето си от него лунният модул има същата скорост и енергията му е:

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{\gamma mM}{r} = -\frac{\gamma mM}{2r}$$

За да тръгне по новата си елиптична орбита, скоростта на лунния модул относно Луната трябва да бъде намалена до определена стойност v_A . Това може да стане като се включат двигателите му така, че да го ускорят относно кораба в посока, обратна на движението на кораба. Новата енергия на модула ще стане:

$$E_1 = \frac{mv_A^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r}$$

Нека скоростта на модула при достигане на лунната повърхност е v_B . Съгласно закона за запазване на енергията:

$$\frac{mv_A^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} = \frac{mv_B^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R}$$

В това уравнение неизвестните са две – скоростите v_A и v_B . Можем да напишем още едно уравнение на основата на II закон на Кеплер:

$$v_A r = v_B R$$

От последните две уравнения получаваме:

$$v_A = \sqrt{\frac{2\gamma MR}{r(R+r)}}$$

Енергията на модула при движението му по елиптичната траектория ще бъде:

$$E_1 = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{\gamma mM}{r} = \frac{\gamma mMR}{r(R+r)} - \frac{\gamma mM}{r}$$

$$E_1 = -\frac{\gamma mM}{R+r}$$

Необходимата промяна на енергията на модула е:

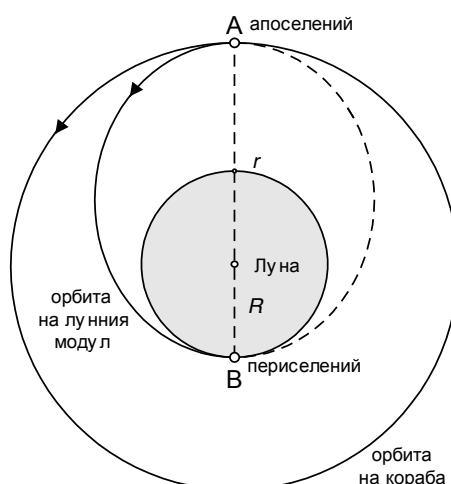
$$E_1 - E_0 = -\frac{\gamma mM}{2r} \cdot \frac{r-R}{r+R}$$

Знакът “минус” означава, че енергията на лунния модул трябва да се намали, т.е. той трябва да изгуби част от своята енергия.

За да започне да пада лунният модул по права линия към Луната, след отделянето му от кораба неговите двигатели трябва да порботят повече – докато скоростта му относно Луната стане нула. Тогава енергията му ще стане:

$$E_2 = -\frac{\gamma mM}{r}$$

Необходимата промяна на енергията на модула ще бъде:



$$E_2 - E_0 = -\frac{\gamma m M}{2r}$$

Очевидно в този случай енергията на кораба трябва да бъде намалена с по-голяма величина.

Как да отчетем промяната на енергията на кораба в края на полета, когато той трябва да се забави, за да извърши меко кацане на Луната? Разбира се, можем да пресметнем тази промяна. Но можем да разсъждаваме и по друг начин. В началото на полета си към Луната и в двата разглеждани случая лунният модул е имал енергия E_0 . В края, когато кацне на Луната и спре, и в двата случая модулът ще има енергия:

$$E_3 = -\frac{\gamma m M}{R}$$

Цялото необходимо изменение на енергията на модула и в двата случая, независимо от начина на маневриране, ще бъде равно на разликата $E_3 - E_0$.

Така разходите на енергия ще са сходни. (Тук трябва да се подчертае една особеност. За какви разходи на енергия говорим, след като всъщност в резултата на маневрите енергията на лунния модул намалява? Нека не забравяме, че единственият начин да се правят тези маневри е използването на ракетни двигатели. При изгарянето на ракетното гориво се отделя енергия. Нека си представим, че искаме да направим маневър, при който лунният модул тръгва по орбита с по-висока енергия. Тогава част от енергията на ракетното гориво се изразходва за повишаване на пълната механична енергия на лунния модул, а пълната механична енергия на изхвърлените от ракетните дюзи газове намалява. Когато правим маневър, при който корабът тръгва по орбита с по-ниска енергия, тогава част от енергията на ракетното гориво се изразходва, за да се увеличи пълната механична енергия на изхвърлените газове и така да се отнеме от енергията на модула. Тези разсъждения не се изискват от учениците при решаването на задачата).

Справочни данни:

Диаметър на Плутон	2274 км
Диаметър на Ерида	2600 км

Критерии за оценяване:

Общо 14 т.

За пресмятане на енергията на модула непосредствено след отделянето от кораба – 2 т.

За пресмятане на енергията при движение по елиптичната орбита – 5 т.

За пресмятане на промяната на енергията – 1 т.

За правилни разсъждения по второто подусловие без отчитане на промяната на енергията при спирането и кацането на лунната повърхност и количествени оценки – 5 т.

За разсъждения, свързани с отчитането на тази промяна – 3 т.